ANALİZ IV DERSİ 2.QUİZ YANIT ANAHTARI

1. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $D_1 f(0,0,0)=2$ ve $D_2 f(0,0,0)=D_3 f(0,0,0)=3$ olsun. Bir g fonksiyonu da

$$g(u,v)=f\left(u-v,u^2-1,3v-3\right)$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $D_1 g(1,1)$ ve $D_2 g(1,1)$ kısmi türevlerini türev matrisinden (Jacobian) yararlanarak bulunuz.

Çözüm. $x=u-v$, $y=u^2-1$, $z=3v-3$ diyelim.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$(u,v)\to h(u,v)\to f\left(h(u,v)\right)=f\left(u-v,u^2-1,3v-3\right)$$

olup, $g=f\circ h$ olmak üzere

$$J_g(u,v)=J_{f\circ h}(u,v)=J_f\left(h(u,v)\right)\cdot J_h(u,v)=J_f(x,y,z)\cdot J_h(u,v)$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}+2u\dfrac{\partial f}{\partial y} & -\dfrac{\partial f}{\partial x}+3\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$D_1 g(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+2u\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=D_1 f(x,y,z)+2u\cdot D_2 f(x,y,z)$$

$$D_2 g(u,v)=\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=-\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+3\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=-D_1 f(x,y,z)+3\cdot D_3 f(x,y,z)$$

bulunur. Böylece

$$D_1 g(1,1)==D_1 f(0,0,0)+2\cdot 1\cdot D_2 f(0,0,0)=2+2\cdot 3=8$$

$$D_2 g(1,1)=-D_1 f(0,0,0)+3\cdot D_3 f(0,0,0)=-2+3\cdot 3=7$$

elde edilir.

2. Üç boyutlu uzayda bir $\vec{v}$ vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\vec{v} = (2,3,1)$$

Yine üç boyutlu uzayda herhangi bir $\vec{u} = (x, y, z)$ birim vektörü göz önüne alınsın. Bu takdirde $\vec{u}.\vec{v}$ iç-çarpımının en büyük değerine ulaşması için $\vec{u} = (x, y, z)$ ne olmalıdır.

Çözüm. $\vec{u} = (x, y, z)$ birim vektör olduğundan

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \qquad (1)$$

olur. Yine

$$\vec{u}.\vec{v} = (x, y, z).(2,3,1) = 2x + 3y + z \qquad (2)$$

bulunur. (2) yi (1) yan koşuluna denk olarak

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

maksimum yapmayı istiyoruz. Bunun için Lagrange Çarpım Yöntemini kullanabiliriz. Lagrange çarpım fonksiyonu

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$

biçimindedir. Şimdi $\nabla L = 0$ denklemini çözmeliyiz.

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = \left(2 + 2\lambda x, 3 + 2\lambda y, 1 + 2\lambda z, x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0$$

olmasından

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2.\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = 3.\dfrac{1}{2\lambda} \\ z = 1.\dfrac{1}{2\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} = (x, y, z) = \frac{1}{2\lambda}.(2,3,1) = \frac{1}{2\lambda}.\vec{v}$$

elde edilir. O zaman $\vec{u}$ vektörünün birim vektör olması gereğince

$$2\lambda = \|\vec{v}\| \Rightarrow 2\lambda = \|(2,3,1)\| \Rightarrow 2\lambda = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

olup, $\vec{u}.\vec{v}$ nin en büyük olması için $\vec{u} = \left(2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}\right)$ olmalıdır.